Dans cette séance on va voir :

(i) notion de matrice diagonalisable $\longrightarrow$ diagonalisation

(ii) application aux puissances d'une matrice

19.11

Déf (trace d'une matrice)

(pour les exos de la série 11)

$$Tr \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} := a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$$

Déf 11.4 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est <u>diagonalisable</u> s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\underbrace{D = P^{-1} \cdot A \cdot P}$ est matrice diagonale.

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$$

Première + deuxième caractérisation de matrices diagonalisables

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

A diagonalisable $\overset{Eq(i)}{\Longleftrightarrow}$ A possède n vecteurs propres qui forment une base de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas : si $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres ($\bar{v}_i$ est vecteur propre de valeur propre $\lambda_i \in \mathbb{R}$), alors

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \left[\bar{v}_1 \ \cdots \ \bar{v}_n \right] = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}}$$

$\overset{\text{Eq (ii)}}{\Longleftrightarrow}$ Lorsqu'on fait $\boxed{DP}$, $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Procédure usuelle :

$\boxed{DP}$

① On calcule les valeurs propres de A = racines de $P_A(\lambda) \rightsquigarrow \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

② Pour chaque λ_i on calcule une base de $E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n) \rightsquigarrow \mathcal{B}_i = \{\bar{v}_{i1}, \dots, \bar{v}_{im_i}\}$

$\overset{\text{Eq (iii)}}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{mult}_a(\lambda_i) = \operatorname{mult}_g(\lambda_i)$, $\forall \lambda_i$ valeur propre de A

(si toutes les racines de P_A sont réelles)

Deux propriétés importantes :

① Si A et B sont semblables i.e. $B = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors $P_A = P_B$ [THM. 10.21]

② Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres différentes de A, $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ des vecteurs propres de A

$(A.\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i, \forall i)$. Alors $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ est libre.

$\boxed{\text{Application}}$ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, i.e. $A = P.\underbrace{D}_{= \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}}.P^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, alors

$$A^N = \underbrace{(PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}DP^{-1}).(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})(PDP^{-1})}_{N \text{ facteurs "} PDP^{-1} \text{"}}$$

$$= P.\underbrace{D. \dots .D}_{N \text{ facteurs}}.P^{-1} = P.D^N.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} d_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^N \end{pmatrix}.P^{-1}$$

$\boxed{\text{Exercice}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$ Calculer $\rightsquigarrow$ A^{10000}.

↳ $\boxed{\text{On commence par diagonaliser } A}$?

(1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-\lambda & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 7/9-\lambda & -8/9 \\ -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[\left(\frac{7}{9}-\lambda\right)\left(-\frac{7}{9}-\lambda\right) - \frac{32}{81}\right]$$

$$= -(\lambda-1)\left[\lambda^2 - \frac{49}{81} - \frac{32}{81}\right] = -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\rightsquigarrow$ deux valeurs propres : $\begin{cases} \lambda = -1 \text{ et } \mathrm{mult}_a(-1) = 1 \\ \lambda = 1 \text{ et } \mathrm{mult}_a(1) = 2 \end{cases}$

② $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \right\}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$

$\longrightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} & ? & \\ & & \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$\Rightarrow A^{10000} = P \cdot D^{10000} P^{-1}$

$= P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{10000} & & \\ & 1^{10000} & \\ & & 1^{10000} \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓